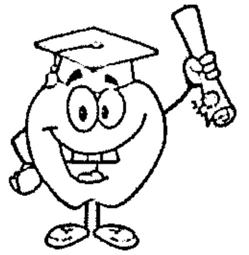


الرياضيات

7

التحليل (5)

14

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف الطلي

انتهينا بالمحاضرة السابقة من البحث الثاني بمقررنا واليوم سنبدأ ببحث جديد ولكن قبل البدا سوف نأخذ تمهيد بنظرية القياس.

المدخل الى نظرية القياس:

مقدمة بنظرية المجموعات.

مقدمة في التبولوجيا.

مقدمة أساسية في نظرية القياس

مقدمة أساسية في نظرية المجموعات:

المجموعة: تمثل الوعاء الذي يشمل عدة أشياء.

نقول مجموعة طلاب الجامعة، مجموعة أدوات منزلية، ....، مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة قواسم العشرة.

تمثل المجموعة بعدة طرق منها:

القائمة: يتم عرض جميع العناصر بشكل كامل.

القاعدة: يتم ذكر الصفة المميزة.

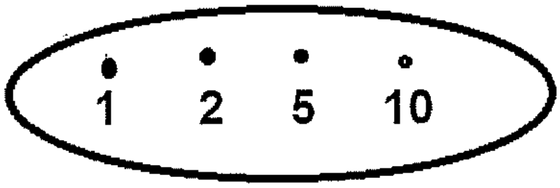
مخططات الفن: رسم المجموعة بعدة أشكال. (مثلاً نرسم دائرة نضع فيها العناصر)

مثال: إذا كانت X مجموعة قواسم العدد 10.

طريقة القائمة $X = \{1, 2, 5, 10\}$

طريقة القاعدة $X = \{n \in \mathbb{N}; 10 mod n = 0\}$; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

طريقة مخططات الفن



- ✓ يرمز للمجموعة بأحرف كبيرة
$A, B, C, \dots$
- ✓ يرمز للعناصر بأحرف صغيرة
$a, b, c, \dots$

العلاقات الرئيسية المستخدمة في المجموعات:

$$\in, \quad \notin, \quad \subset, \quad \subseteq, \quad \not\subset, \quad =$$

مثال: $X = \{1,2,3,4,5\}$

$1 \in X, \;\; 7 \notin X$

$\{1,2\} \subset X, \{1,7\} \not\subset X$

المجموعة الخالية:

يرمز لها بـ $\{\ \}$, $\emptyset$ ميزاتها:

محتواه في كل مجموعة.

وهي وحيدة.

قدرة مجموعة: هي عدد عناصرها يرمز لها $|\ \ |$

مثال: $|X| = 5$

مجموعة القوة لمجموعة:

وهي مجموعة كل المجموعات الجزئية أو مجموعة جميع أجزائها

مثال: مجموعة القوى للمجموعة $A = \{1,2\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 4$$

مثال2: مجموعة القوى للمجموعة $B = \{1,2,3\}$

$$P(B) = \{\emptyset, B, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$|P(B)| = 2^{|B|} = 2^3 = 8$$

صف من أجزاء المجموعة A:

ليكن $A = \{1,2\}$ و $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

نقول عن $\tau = \{\{1\},\{2\}\}$ صف من A (أو جماعة من A أو اسرة من A)

ويكون $P(A)$ أكبر صف من أجزاء A

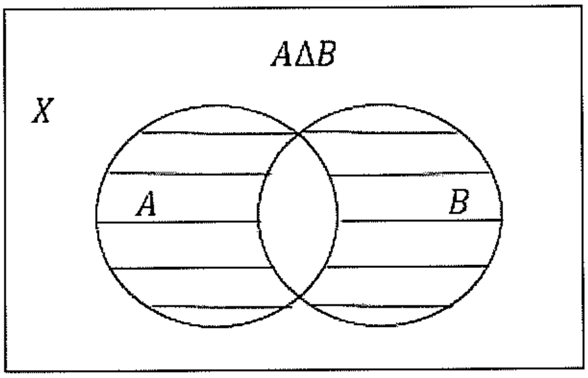
ملاحظة: لا يمكن كتابة $1 \in \tau$ لان طبيعة عناصر τ هي مجموعات والـ1 عنصر

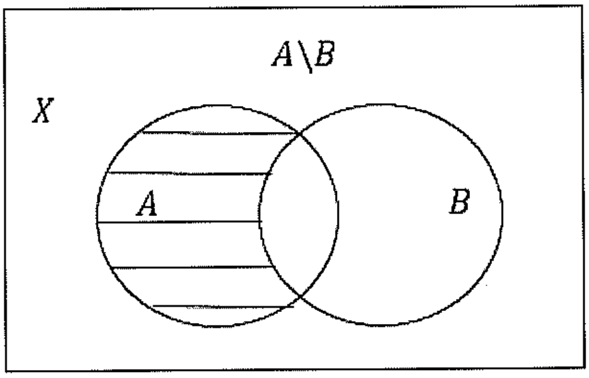
لكن الكتابة الصحيحة $\{1\} \in \tau$

العمليات على المجموعات:

(متمم مجموعة) $'$ أو ^{c} , (فرق التناظري) Δ , (فرق) $\setminus$, $\cup$, $\cap$

علاقات هامة على المجموعات:





$$1)\ \emptyset^c = X\ ,\qquad X^c = \emptyset$$

حيث X المجموعة الشاملة (نسبياً).

$$2)\ A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$
$$= (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

ملاحظة: يرمز للمتمم أما بـ ^{c} أو بالفتحة.

$$3)\ (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$$
$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$$
$$4)\ A\setminus B = A\cap B'$$
$$A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$$
$$A\setminus B = (A\cup B)\Delta B$$
$$5)\ A\cap B = (A\cup B)\setminus(A\Delta B)$$
$$6)\ A\cup B = (A\Delta B)\Delta(A\cap B)$$
$$A\cup B = A\Delta(B\setminus A)$$
$$7)\ A\cup A' = X\ ,\qquad A\cap A' = \emptyset$$

نلاحظ أن مجموعة القوى لمجموعة ما A وهي $P(A)$ مغلقة بالنسبة لجميع عمليات $\cap, \cup$, $\setminus\ ,\Delta\ ,{}^c$.

مثال: أثبت أن $P(A)$ مغلقة لجميع العمليات حيث $A=\{a,b\}$

$$P(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},A\}$$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	A	A
$\{b\}$	$\{b\}$	A	$\{b\}$	A
A	A	A	A	A

c	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	A
	A	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

هذا بالنسبة للاجتماع والمتمم، وكذلك بالنسبة لجميع العمليات.

تمرين: اذكر بعض صفوف المجموعة $B = \{1,2,3\}$

$$\tau_1 = \{\emptyset, B, \{3\}\}$$

$$\tau_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$\tau_3 = P(B) = \{\emptyset, B, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

تعريف التبولوجيا:

لتكن $X \neq \emptyset$ وτ صف غير خالي من أجزاء X.

نقول أن τ توبولوجيا على X إذا تحقق:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\forall A, B \in \tau: \ A \cup B \in \tau, \ A \cap B \in \tau$

3) $\forall A_i \in \tau: \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

أي أن الاجتماع غير المنتهي أيضاً ينتمي لهذا الصف.

ملاحظات:

1) كل عنصر من عناصر τ يدعى مجموعة مفتوحة.

2) كل عنصر متمم لعنصر من عناصر τ يدعى مجموعة مغلقة.

نتيجة: A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A^c مغلقة

3) $X, \emptyset$ مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان بآن واحد.

مثال: اذا كان $X = \{1,2\}$ فهل الصفوف التالية تمثل تبولوجيا ولماذا

1) $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$

إن $\emptyset, X$ ينتميان الى τ_1 فالشرط الأول محقق

و $\{1\} \cup X \in \tau_1, \emptyset \cup X \in \tau_1 , \emptyset \cup \{1\} \in \tau_1$

$\Leftarrow \tau_1$ تبولوجيا.

2) $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

إن τ_2 ليست تبولوجيا لأن $X \notin \tau_2$

3) $\tau_3 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$

إن τ_3 تبولوجيا (الطريق بنفس 1)

4) $\tau_4 = \{\emptyset, X\}$

إن τ_4 تبولوجيا وهي التبولوجيا التافهة

5) $\tau_5 = P(X)$

هي تبولوجيا وهي أوسع تبولوجيا على X

تعريف الجبر:

اذا كان $X \neq \emptyset$ وكان $\mathcal{A}$ صف غير خالٍ من أجزاء X

نقول عن $\mathcal{A}$ أنه يمثل جبراً على X إذا تحققت الشروط التالية:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$

2) $A \setminus B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$: $\forall \quad A, B \in \mathcal{A}$

نلاحظ أن $\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة للاجتماع والفرق

كما أنه مغلق بالنسبة لباقي العمليات على المجموعات والدليل:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}; A\Delta B = \underbrace{(A\setminus B)}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{(B\setminus A)}_{\in\mathcal{A}}$$

$\Leftarrow A\Delta B \in \mathcal{A}$

$\Leftarrow$ الجبر مغلق بالنسبة للفرق التناظري

$$A \cap B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{(B\Delta A)}_{\in\mathcal{A}}$$

$\Leftarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$\Leftarrow$ الجير مغلق بالنسبة للتقاطع

$$A, X \in \mathcal{A} \Rightarrow X\setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$\Leftarrow$ الجبر مغلق بالنسبة للمتمم

تعريف أخر للجبر:

ملاحظة: التعريفين متكافئين

اذا كان $X \neq \emptyset$ وكان $\mathcal{A}$ صف غير خالٍ من أجزاء X

نقول عن $\mathcal{A}$ أنه يمثل جبراً على X إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) $\forall \quad A, B \in \mathcal{A}: \quad A \cup B \in \mathcal{A}$

3) $\forall \quad A \in \mathcal{A}: \quad A^c \in \mathcal{A}$

إذا تحققت الشروط الأخيرة فهل الفرق ينتمي؟

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad A\setminus B \in \mathcal{A}$$

إن $A^c \in \mathcal{A}$ وبالتالي $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ ومنه:

$$\Rightarrow \ (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$$

دومورغان $\Rightarrow \ (A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A\setminus B \in \mathcal{A}$

الجبر التام:

هو جبر مغلق بالنسبة للاجتماع العدود.

$$\forall\ A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

نتيجة: الجبر التام مغلق بالنسبة للتقاطع العدود. لدينا حسب دومرغان:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$$

$$\mathcal{A} \ni \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \Leftarrow \mathcal{A} \ni \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \Leftarrow \mathcal{A} \ni A_i^c \quad \text{إن}$$

تمرين: ما هو أصغر جبر يحوي τ حيث:

$$\tau = \{\{1,2\},\{3\}\}, X = \{1,2,3,4\}$$

طريقة الحل: يجب أن يحتوي على $\emptyset, X$ ثم نطبق الاجتماع ثم المتمم

الخطوة الأولى: $\{1,2\}, \{3\}, X, \emptyset,$

الخطوة الثانية: $\{1,2\}, \{3\}, X, \emptyset, \{1,2,3\}$

الخطوة الثالثة: $\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{3\}, X, \emptyset, \{1,2,3\}, \{4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}\}$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.